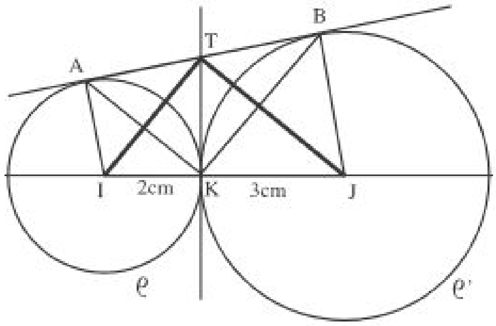
تمرين 17 صفحة 185 :

17

في الشّكل (C) و(C') دائرتان متماسّتان في النّقطة K و $IB = 2\sqrt{7}$

(AB) مماسّ مشترك للدّائرتين (C) و(C') على التّوالي في A و B والمستقيم (KT) عموديّ على (IJ) في النّقطة K ويقطع (AB) في النّقطة T



لتكنْ M نقطة تقاطع (TJ) و (BK)

و N نقطة تقاطع (AK) و (IT)

أ- أحسب AB

ب- بيّن أنّ المثلّثين IAT و IKT متقايسان

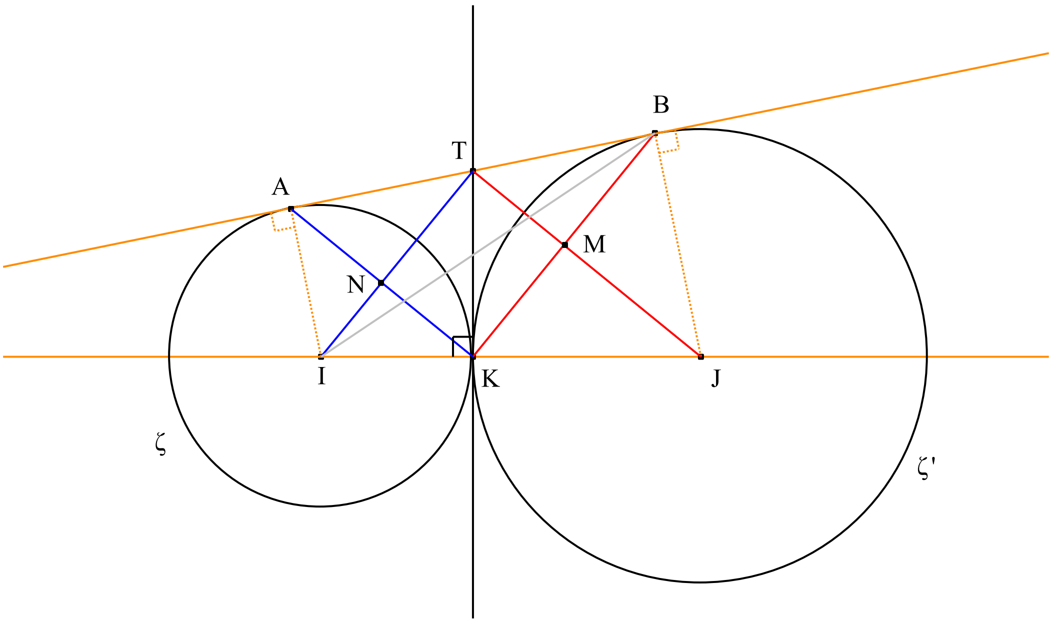
ج- بيّن أن T منتصف [AB]

د- احسب IT و JT ثمّ بيّن أنّ المثلّث ITJ قائم الزّاوية في T

هـ- احسب AK

و- بيّن أنّ المثلّث AKB قائم الزّاوية في K ثمّ احسب BK

ز- ما هي طبيعة الرّباعيّ KMTN ؟ علّل جوابك



أ- (AB) هو مماس للدائرة ζ في النقطة A

إذن $(AB) \perp (IA)$

بالتالي المثلث AIB قائم في A

حسب نظرية بيتاغور : $IB^2 = AI^2 + AB^2$

بالتالي $AB^2 = IB^2 - AI^2$

$= \left(2\sqrt{7}\right)^2 - 2^2$

$= 28 - 4 = 24$

إذن $AB = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}\ cm$

ب- لنبين تقايس المثلثين IAT و IKT

المثلثان IAT و IKT قائمان في A و K على التوالي ولدينا :

- $[IT]$ وتر مشترك
- $IA = IK$ (A و K نقطتان من دائرة مركزها I)

حسب الحالة الثانية لتقايس المثلثات القائمة فإنّ IAT و IKT متقايسان

ج-

- ينتج عن تقايس المثلثين IAT و IKT تقايس العناصر النظيرة الأخرى مثنى مثنى و منه $AT = TK$ $\boxed{1}$
- لنبين تقايس المثلثين BTJ و TKJ

المثلثان BTJ و TKJ قائمان في B و K على التوالي ولدينا :

- $[JT]$ وتر مشترك
- $JB = JK$ (B و K نقطتان من دائرة مركزها J)

حسب الحالة الثانية لتقايس المثلثات القائمة فإنّ BTJ و TKJ متقايسان

ينتج عن هذا التقايس تقايس العناصر النظيرة الأخرى مثنى مثنى و منه $BT = TK$ $\boxed{2}$

- من $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$ نستنتج أنّ $AT = BT$

و بما أنّ النقاط B و T و A على استقامة واحدة

فإنّ T منتصف $[AB]$

د- لنا T منتصف $[AB]$ إذن $TA = TB = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{2\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6}$

- حساب IT :

لنا AIT مثلث قائم في A

حسب نظرية بيتاغور : $IT^2 = AI^2 + AT^2$

$= 2^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2$

$= 4 + 6 = 10$

إذن $IT = \sqrt{10}$

- حساب JT :

لنا BTJ مثلث قائم في B

حسب نظرية بيتاغور : $JT^2 = BJ^2 + BT^2$

$$= 3^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2$$

$$= 9 + 6 = 15$$

إذن $JT = \sqrt{15}$

- لنا $K \in [IJ]$ إذن $IJ = IK + KJ = 2 + 3 = 5cm$

لدينا $\left.\begin{array}{l} IT = \sqrt{10} \\ JT = \sqrt{15} \\ IJ = 5 \end{array}\right\}$ إذن $\left.\begin{array}{l} IT^2 = 10 \\ JT^2 = 15 \\ IJ^2 = 25 \end{array}\right\}$

بما أنّ $25 = 15 + 20$

فإنّ $IJ^2 = JT^2 + IT^2$

حسب عكس نظرية بيتاغور فإنّ المثلث ITJ قائم في T

ه- حساب AK :

لدينا $TA = TK$ و $IA = IK$

إذن (TI) هو الموسط العمودي لـ $[AK]$

بما أنّ (TI) يقطع (AK) في N

فإنّ : N منتصف $[AK]$ و منه $AK = 2 \times AN$

و $[AN]$ هو ارتفاع المثلث ATI الصادر من A

- لنا ATI مثلث قائم في A و $[AN]$ ارتفاعه الصادر من A

إذن $AN \times TI = AI \times AT$

$$AN = \frac{AI \times AT}{TI}$$

$$= \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{10}}$$

بما أنّ $AK = 2 \times AN$

فإنّ $AK = 2 \times \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{10}} = \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{10}}$

و- في المثلث AKB لدينا :

- T منتصف $[AB]$
- $TA = TK = TB$

إذن المثلث AKB قائم في K

و حسب نظرية بيتاغور : $AB^2 = AK^2 + BK^2$

$$\begin{aligned} BK^2 &= AB^2 - AK^2 \\ &= \left(2\sqrt{6}\right)^2 - \left(\frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{10}}\right)^2 \\ &= 24 - \frac{16\times 6}{10} \\ &= 24 - \frac{16\times 6}{10} \\ &= 24 - 9,6 = 14,4 \end{aligned}$$

بالتالي $BK = \sqrt{14,4}$

ز-

- لنا (TI) هو الموسط العمودي لـ $[AK]$

إذن $(AK) \perp (TI)$ و بما أنّ $(AK) \cap (TI) = \{N\}$ فإنّ $(TN) \perp (NK)$

ومنه $T\hat{N}K = 90°$

- لنا $TK = TB$ و $JK = JB$

إذن (TJ) هو الموسط العمودي لـ $[BK]$

بالتالي $(BK) \perp (TJ)$ و بما أنّ $(BK) \cap (TJ) = \{M\}$ فإنّ $(TM) \perp (MK)$

ومنه $T\hat{M}K = 90°$

- لنا AKB مثلث قائم في K

إذن $(BK) \perp (AK)$ و بما أنّ $N \in (AK)$ و $M \in (BK)$ فإنّ $(NK) \perp (MK)$

و منه $N\hat{K}M = 90°$

للرباعي $KMTN$ ثلاث زوايا قائمة

نستنتج أنّ $KMTN$ مستطيل